تمرين :

ليكن $A$ جبر لي ضمن الحلقة $R$ أثبت أن $x_1, x_2, x_3, x_4 \in A$ فإن

$$[[[x_1,x_2],x_3],x_4]+[[[x_2,x_1],x_4],x_3]$$

$$+[[[x_3,x_4],x_1],x_2]+[[[x_4,x_3],x_2],x_1]=0$$

نفرض أن $y=[x_1,x_2]$ لدينا

$$[y,[x_3,x_4]]+[x_3,[x_4,y]]+[x_4,[y,x_4]]$$

$$[[y,x_3],x_4]=[y,[x_3,x_4]]-[x_3,[x_4,y]]$$

$$[[y,x_3],x_4]-[[y,x_4],x_3]=[y,[x_3,x_4]] \quad \text{---} (1)$$

نفرض أن $Z=[x_3,x_4]$ لدينا

$$[Z,[x_1,x_2]]+[x_1,[x_2,Z]]+[x_2,[Z,x_1]]=0$$

$$[[Z,x_1],x_2]=[Z,[x_1,x_2]]+[x_1,[x_2,Z]]$$

$$[[Z,x_1],x_2]-[[Z,x_2],x_1]=[Z,[x_1,x_2]] \quad \text{---} (2)$$

بجمع (1) و (2) نجد :

$$[[[x_1, x_2], x_3], x_4] + [[[x_2, x_1], x_4], x_3]$$

$$+ [[[x_3, x_4], x_1], x_2] + [[[x_4, x_3], x_2], x_1] =$$

$$[[x_1, x_2], [x_3, x_4]] + [[x_3, x_4], [x_1, x_2]] = 0$$

بدل　　　　　　بدل

فينتج المطلوب ونظيره

لدينا $M$ مودول و $N$ مودول جزئي من $M$

$$N \xrightarrow{\tau} M \xrightarrow{\pi} M/N$$

$\pi$ : تشاكل القانوني الناتج

$\tau$ تشاكل الاحتواء القانوني

$\forall x \in N \quad \tau(x) = x$

$Im(\tau) = ker(\pi)$

تعريف المتتاليات التامة :

نقول عن متتالية من جبر لي وتشاكلاتها

$$A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}}$$

عند الحلقة $R$ إنها تامة إذا حققت الشرط

$\forall i \quad ker(f_i) = Im(f_{i-1})$

$0 = f_i(f_{i-1}(A_{i-1}))$

$f_i f_{i-1} = 0$

ينتج من التعريف أن

$\forall i \quad f_i f_{i-1} = 0$

مثال: ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبور متباين عندئذ

$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B$ حيث 0 من الجبرية $A, B$ وجبور التعريف الصفري

المتتالية تامة

نتيجة :

الشرط اللازم والكافي كي يكون التشاكل $f: A \to B$ متباين هو ان تكون المتتالية $0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B$ تامة

مثال:

ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبوري تام

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$

$Im(f) = B = ker(0)$

لذا فالتشاكل الجبري هو الحالة

عندئذ المتتالية $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$ تامة

نتيجة :

الشرط اللازم والكافي كي يكون التشاكل $f: A \to B$ غامر هو ان تكون المتتالية

$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$ تامة

مثال:

ليكن $f: A \to B$ تشاكل جبري بالذات f متباين وغامر عندئذ المتتالية الآتية

$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ تامة

نتيجة:

الشرط اللازم والكافي كي تكون المتتالية $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0$ تامة هو ان يكون

المتتالية متتابعة دقيقة

مثال:

ليكن A مقاس على الحلقة R و I مثالي في A عندئذٍ المتتالية

$$I \xrightarrow{\tau} A \xrightarrow{\pi} A/I \longrightarrow 0$$

تامة حيث :

π تشاكل القانوني الغامر

τ تشاكل الاحتواء القانوني والمعرف $\tau(x) = x \quad \forall x \in I$ وهو متباين دوماً

نتعرض إلى الصفة الثالثة من المبرهنة:

ليكن A مقاس على الحلقة R ، B مقاس جزئي في A عندئذٍ كل مقاس جزئي $\bar{D}$ في مقاس القسمة $A/B$ هو من الشكل $D/B$ حيث D مقاس جزئي في A ويحوي B

انتهت المحاضرة